

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М. В. ЛОМОНОСОВА**

**ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ**

**КАФЕДРА ФИЗИКИ ЧАСТИЦ И КОСМОЛОГИИ**

**КУРСОВАЯ РАБОТА**

**ИНФЛЯЦИЯ С ОТСКОКОМ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ ТЕОРИЯХ  
ГРАВИТАЦИИ**

Выполнила студентка  
443 группы  
Еваровская Злата Вадимовна

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор  
Алексеев Станислав Олегович

Москва  
2024

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Петлевая квантовая космология</b>	<b>5</b>
2.1	Петлевая квантовая гравитация . . . . .	5
2.2	Вид метрики . . . . .	5
2.3	Общая теория относительности в переменных Аштекера . . . . .	5
2.4	Петлевая квантовая космология . . . . .	6
2.5	Теория с инфляцией . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Петлевая квантовая космология Бранса-Дикке</b>	<b>9</b>
<b>4</b>	<b><math>f(R, \varphi)</math> теория</b>	<b>11</b>
4.1	Условия для отскока . . . . .	12
4.2	Условие для инфляции . . . . .	12
<b>5</b>	<b>Теория с двумя скалярными полями</b>	<b>13</b>
<b>6</b>	<b>Заключение</b>	<b>15</b>

# 1 Введение

Космологические модели с инфляцией и модели с отскоком имеют свои сильные и слабые стороны. В данной работе рассмотрены модели, в которых за фазой отскока следует жизнеспособная инфляционная фаза. Это включает в себя ряд преимуществ обоих методов и, следовательно, является более жизнеспособной моделью космической эволюции.

Стандартной космологической модели (Большого Взрыва) удалось изящным образом проследить тепловую эволюцию космоса, сравнив скорость взаимодействия частиц со скоростью расширения. На очень горячих стадиях скорость взаимодействий намного превышает скорость расширения, и может быть достигнуто локальное тепловое равновесие, в то время как на более поздних стадиях, когда Вселенная остывает, скорость взаимодействия уменьшается быстрее, чем расширение, что позволяет частицам отделяться от излучения при равенстве скоростей.

Однако теория Большого взрыва, хотя и согласуется с общей теорией относительности и связана с наблюдаемым расширением Хаббла, страдает от множества проблем, таких как причинно-следственная связь, проблема горизонта, проблема плоскостности и т.д.

Инфляционная космология, предложенная Аланом Гутом в 1981 году [1], дает решение некоторых загадок стандартной космологии Большого Взрыва, вводя эпоху почти экспоненциального расширения через  $\approx 10^{-35}$  с после большого взрыва в ранней Вселенной. Помимо того, что она служит механизмом для решения таких проблем, как изотропность, однородность, горизонт, плоскостность, энтропия, и т.д. Она гораздо эффективнее предсказывает космос, который мы видим сегодня [2]. Она предлагает первое в истории причинно-следственное объяснение происхождения неоднородностей во Вселенной. Если быть точным, она предсказывает первичные спектры мощности, эволюция которых объясняет как формирование крупномасштабной структуры, так и небольшие неоднородности, присутствующие в космическом микроволновом фоне (СМВ) [1, 33]. Сегодня беспрецедентный успех инфляционной парадигмы основан на точности наблюдений [4, 5, 6].

Стандартные модели инфляции предполагают существование самосвязанного скалярного поля (инфлатона), минимально связанного с гравитацией, потенциал которого определяет инфляционную модель. На этом этапе начальные квантовые флуктуации пересекают горизонт и трансформируются в классические флуктуации, создавая почти масштабно-инвариантный спектр скалярных возмущений. Хотя инфляция решает вышеупомянутые проблемы, одна из фундаментальных проблем все еще существует, а именно начальная сингулярность, которая возникает при прослеживании Вселенной назад во времени в виде расхождений космической температуры и плотности. Поскольку начальная сингулярность возникает до начала инфляции, проблема не может быть решена в рамках инфляции.

Классическая парадигма отскока [7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14] как альтернатива инфляции, стремится эффективно решить проблему сингулярности, постулируя, что Вселенная возникла (хотя и в непознаваемом состоянии) в асимптотическом прошлом с ненулевым масштабным коэффициентом и претерпевает фазу сжатия до тех пор, пока масштабный коэффициент не достигнет ненулевого минимума, прежде чем вступить в фазу расширения, которая продолжается по сей день.

Однако модели отскока обычно сталкиваются с двумя основными проблемами [49, 16]: Первая называется проблемой анизотропии, что означает, что в фазе сжа-

тия анизотропии растут быстрее, чем фон, так что сжатие заканчивается полностью анизотропной Вселенной, что нарушает космологический принцип, и перехода к фазе расширения не произойдет. Вторая проблема называется проблемой призрачной нестабильности. Поскольку параметр Хаббла ( $H \approx \dot{a}/a$ ,  $a(t)$  - масштабный коэффициент Вселенной) меняет свой знак с отрицательного на положительный, фаза  $\dot{H} > 0$  является обязательной. С другой стороны, в плоской Вселенной Фридмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW) мы имеем  $\dot{H} = -(\rho + p)$ , где  $\rho$  и  $p$  - полная энергия и полная плотность давления Вселенной соответственно. Таким образом, в такой Вселенной для отскока требуется  $\rho + p < 0$ , что является нарушением условия нулевой энергии (NEC). Это приводит к появлению призрачных степеней свободы и градиентной нестабильности.

Хотя космологии инфляции и отскока имеют значительные преимущества и сталкиваются с различными проблемами, объединение этих парадигм в единую модель может использовать сильные стороны обеих. Эта гибридная модель может устранить недостатки каждого отдельного подхода, предлагая более полное понимание эволюции Вселенной с самых ранних моментов ее обширной истории.

## 2 Петлевая квантовая космология

Среди множества подходов к квантовой гравитации самыми успешными направлениями считаются теория струн и петлевая квантовая гравитация.

Петлевая квантовая гравитация (LQG) является ведущим непертурбативным и независимым от фона подходом к квантованию гравитации [17]. Основная геометрия в LQG дискретна, и непрерывное пространство-время получается из квантовой геометрии в пределе больших собственных значений. Применение методов LQG к однородным изотропным пространствам приводит к петлевой квантовой космологии (LQC) [18], что привело к важным результатам в разрешении сингулярностей в различных ситуациях [19, 20, 21].

### 2.1 Петлевая квантовая гравитация

Петлевая квантовая гравитация (LQG) представляет собой непертурбативное и фоновно независимое квантование общей теории относительности. Основанная на каноническом подходе, она использует переменные Аштекера, а именно  $SU(2)$  матрицы, связанные со спиновыми коэффициентами, и триады плотности [22].

Основные положения петлевой квантовой гравитации заключаются в том, чтобы, с одной стороны, сузить пространство решений, за счёт того, чтобы использовать разложение Арновита-Дезера-Мизнера изначально, а с другой стороны, метрические функции с помощью преобразований Аштекера привести к такому виду, чтобы они составляли замкнутую алгебру. Благодаря этому удаётся создать закрытую алгебру коммутаторов и за счёт этого модель можно проквантовать.

### 2.2 Вид метрики

Разложение ADM (Арновита-Дезера-Мизнера) общей теории относительности разбивает гиперболический многообразие на временные и пространственные части и может быть понято как расслоение пространства-времени на пространственные слои. Линейные элементы записываются как:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + q_{ab}(dx^a + N^a dt)(dx^b + N^b dt), \quad (1)$$

где  $N$  - функция ошибок (lapse function),  $N^a$  - вектор сдвига (shift vector).

### 2.3 Общая теория относительности в переменных Аштекера

$$S = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^4x. \quad (2)$$

Вычисления показывают, что  $g^{00}$  и  $g^{0i}$  появляются в выражении для скаляра Риччи без временных производных. Это означает, что они на самом деле являются множителями Лагранжа, связанными с ошибкой и сдвигом, где  $g = g^{00} = \frac{1}{N^2}$  и  $g^{0i} = \frac{N^i}{N^2}$ .

- Вводятся триады плотности (densitized triads)  $E_i^a$ :

$$\det(q)q^{ab} = E_i^a E_j^b \delta^{ij} \quad (3)$$

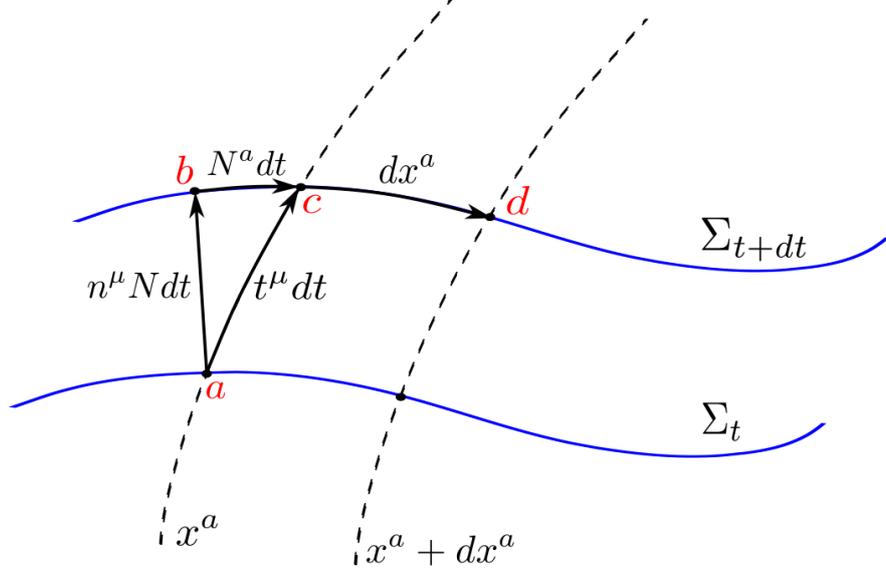


Рис. 1: Графическая интерпретация функции ошибок  $N$  и вектора сдвига  $N^a$ . Изображение из [23]

- Вводятся  $SU(2)$  матрицы  $A_a^i$ , связанные со спиновыми коэффициентами  $\Gamma_a^i$ :

$$A_a^i = \Gamma_a^i + \gamma K_a^i \quad (4)$$

$\gamma$  — свободный параметр (Barbero-Immirzi)

Промежуточные математические вычисления можно найти в [23].

## 2.4 Петлевая квантовая космология

Существует множество хороших обзоров по петлевой квантовой космологии [20, 24]. При условии, что Вселенная является однородной и изотропной, что поддерживается многими наблюдениями, она является одной из самых простых систем для описания. На больших масштабах она чрезвычайно симметрична и поэтому является одним из самых простых возможных объектов.

Благодаря симметриям переменные Аштекера могут быть выбраны диагональными и записаны как:

$$A_a^i = c \delta_a^i, \quad E_i^a = p \delta_i^a, \quad (5)$$

Где  $p = a^2$  — масштабный фактор,  $c \sim \partial_t a$  — параметр Хаббла  $\Rightarrow$

$$c, p = 8\pi G \gamma / 3 \quad (6)$$

Через уравнения эволюции  $\dot{p} = \{p, H\}$ , можно легко восстановить, на классическом уровне, уравнение Фридмана:

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho. \quad (7)$$

Заменой  $c \rightarrow \sin(\mu c)/\mu$  классический гамильтониан переходит в LQG гамильтониан

$$\partial_t p = \{p, H_{\text{eff}}\} \Rightarrow H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho \left(1 - \frac{\rho}{\rho_c}\right) \quad (8)$$

При  $\rho = \rho_c$  вместо Большого взрыва возможен отскок.

$$\rho_c = \frac{\sqrt{3}}{16\pi^2\gamma^3} m_{\text{Pl}}^4 \approx 0.82 m_{\text{Pl}}^4, \quad (9)$$

где значение  $\gamma \approx 0.239$  получено из расчета энтропии черных дыр [25].

## 2.5 Теория с инфляцией

Глобальная динамика таких моделей впервые была изучена в работе [26].

Уравнение, управляющее эволюцией скалярного поля во вселенной Фридмана-Робертсона-Уокера, имеет вид:

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (10)$$

Ниже, на рис.2, представлена эволюция скалярного поля как функция космического времени. Отрицательное значение  $H$  в фазе предварительного отскока действует как антифрикционный член, приводящий к усилению колебаний поля  $\phi$ . В частности, когда скалярное поле изначально находится на дне потенциальной ямы с некоторой небольшой ненулевой производной  $\dot{\phi}$ , оно поднимается вверх по потенциальной яме в результате сжатия вселенной. Затем увеличивает свой потенциал, чтобы, наконец, вступить в фазу линейного изменения со временем, соответствующую медленной инфляции.

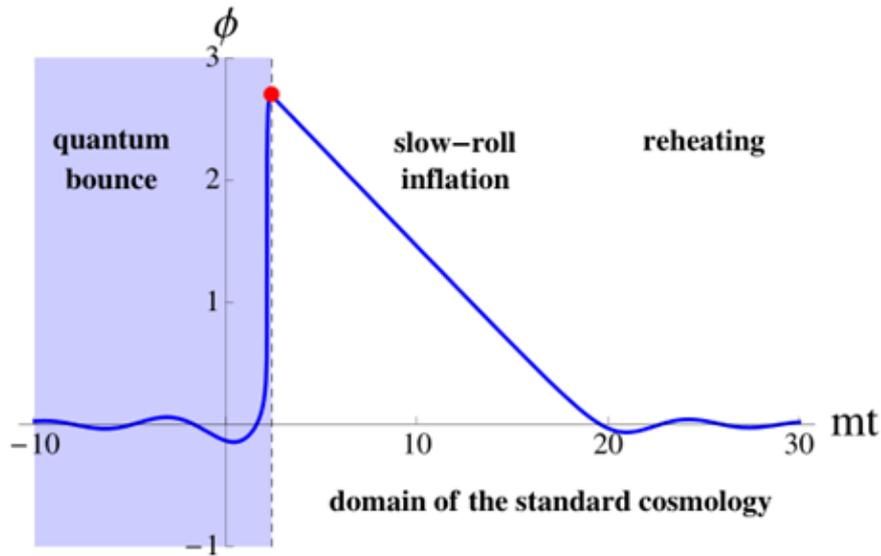


Рис. 2: Эволюция типа "акулый плавник" для скалярного поля при  $m = 10^{-3} m_{\text{Pl}}$ . Красная точка представляет точку, где обычно задаются начальные условия в классической космологии. Изображение из [23] для  $V(\phi) = m^2 \phi^2 / 2$

Как уже отмечалось выше, при  $\rho = \rho_{crit}$  возможен квантовый отскок. И  $\rho_{crit}$  связано с  $\phi$  следующей формулой:

$$\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) = \rho_{crit}. \quad (11)$$

Начальные условия для начала инфляции и ее достаточно продолжительного протекания, чтобы решить проблемы горизонта и плоскостности (то есть инфляция с как минимум 60 е-складками; количество е-складок является логарифмом отношения масштабного коэффициента в конце и в начале инфляции) могут показаться довольно тонко настроенными. Грубо говоря, для того чтобы инфляция началась и Вселенная оставалась на такой траектории, скалярное поле должно изначально находиться в состоянии, при котором его плотность энергии доминирует над потенциальной энергией, и поле остается в этом особом состоянии. Это может быть достигнуто путем выполнения двух условий:

$$\epsilon := \frac{(\dot{\phi})^2}{(\dot{\phi})^2 + 2V(\phi)} \ll 1 \quad \text{и} \quad \eta := \frac{-\ddot{\phi}}{3H\dot{\phi}} \ll 1. \quad (12)$$

Первое условие позволяет Вселенной войти в фазу ускоренного расширения, так как легко видно, что

$$\frac{\ddot{a}}{a} \approx \left( \frac{8\pi G}{3} \right) V(\varphi)(1 - 2\epsilon) \quad (13)$$

имеет положительное значение для положительного потенциала. Тем не менее, это условие недостаточно для того, чтобы инфляция длилась достаточно долго, чтобы количество е-складок было больше 60. Рассматривая аналогию с массивным маятником, это первое условие просто означает, что маятник далёк от своего равновесия. Если позволить маятнику двигаться, начиная с этого далёкого от равновесия положения, он, конечно, быстро скатится к своему равновесному режиму, где доминирование потенциальной энергии больше не соблюдается. Второе условие как раз предназначено для того, чтобы предотвратить такое быстрое скатывание. Идея на самом деле очень проста: сопротивление Хаббла просто не позволяет полю быстро скатиться вдоль его потенциала.

### 3 Петлевая квантовая космология Бранса-Дикке

Недавно непертурбативная схема квантования петлевой квантовой гравитации была расширена на теорию Бранса-Дикке [27, 28], и была получена соответствующая петлевая квантовая космология Бранса-Дикке, что предоставляет важную платформу для изучения моделей инфляции для этой теории.

Действие четырёхмерной теории Бранса-Дикке (BD) задаётся как [29]:

$$S_J = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{M_{Pl}}{2} \phi R + \frac{M_{Pl}}{\phi} \omega_{BD} X - V(\phi) \right], \quad (14)$$

где  $g$  - это определитель метрического тензора пространства-времени  $g_{\mu\nu}$ ,  $R$  - это четырёхмерный скаляр Риччи,  $\phi$  - это скалярное поле Бранса-Дикке (BD),  $\omega_{BD}$  - это параметр Бранса-Дикке, который является безразмерной константой,  $X \equiv -\frac{1}{2}g^{\mu\nu}(\partial_\mu\phi)(\partial_\nu\phi)$ , а  $V(\phi)$  представляет потенциал скалярного поля  $\phi$ . Заметим, что гравитационная постоянная  $8\pi G = M_{Pl}^{-2} = 8\pi m_{Pl}^{-2}$ , где  $M_{Pl}$  и  $m_{Pl}$  являются редуцированной и полной массами Планка соответственно. Обратите внимание, что в отличие от оригинальной теории Бранса-Дикке, мы ввели потенциал поля  $V(\phi)$ .

В системе отсчета Джордана мы рассматриваем пространственно-плоскую Вселенную Фрийдмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW), для которой метрическая форма записывается как

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^i dx_i, \quad (15)$$

где  $a(t)$  - масштабный фактор Вселенной, а  $t$  - космическое время в системе Джордана. Динамика Вселенной может быть получена из действия (14), которое описывается модифицированными уравнениями Фрийдмана и Клейна-Гордона, а именно:

$$3M_{Pl}^2 \left( H + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \right)^2 = \frac{M_{Pl}^2 \rho_\phi}{\phi^2}, \quad (16)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{2}{\beta M_{Pl}} (\phi V_\phi(\phi) - 2V(\phi)) = 0. \quad (17)$$

где  $H \equiv \dot{a}/a$  обозначает параметр Хаббла,  $\beta \equiv 2\omega_{BD} + 3$ , и  $\rho_\phi \equiv \frac{\beta}{4}\dot{\phi}^2 + \phi V(\phi)/M_{Pl}$  является эффективной плотностью энергии скалярного поля Бранса-Дикке.

Эффективная динамика петлевой квантовой космологии Бранса-Дикке (BD) выведена в системе отсчета Джордана в работах [30, 28], в которых эффективные уравнения Фрийдмана и Клейна-Гордона для фоновой космологии со скалярным полем BD  $\phi$  задаются как

$$\left( H + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \right)^2 = \left( \frac{1}{\phi} \sqrt{\frac{\rho_\phi}{3}} \sqrt{1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_c}} + \frac{\dot{\phi}}{2\phi} \left( 1 - \sqrt{1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_c}} \right) \right)^2, \quad (18)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{2}{\beta M_{Pl}} \phi V_\phi + \frac{2}{\beta M_{Pl}} V(\phi) \left( 1 - 3\sqrt{1 - \frac{\rho_\phi}{\rho_c}} \right) = 0. \quad (19)$$

Очевидно, что эффективная плотность энергии поля BD  $\rho_\phi$  теперь имеет максимальное значение  $\rho_c$ . Когда  $\rho_\phi$  приближается к этому максимальному значению, параметр Хаббла  $H$  в системе Джордана приближается к нулю, что подразумевает квантовый отскок в этот момент в системе Джордана. В результате прошлую

сингулярность, возникающую в классической вселенной ВД в системе Джордана, устраняет квантовый отскок. Когда  $\rho_\phi \ll \rho_c$ , приведенные выше уравнения сводятся к классической версии в классической теории ВД.

Инфляция характеризуется ускорением Вселенной  $\ddot{a} > 0$ . Однако важно иметь продолжительный период инфляции, чтобы получить достаточное количество е-складок для решения проблем космологии Большого взрыва. Это часто характеризуется параметрами медленного скатывания. В теории Бранса-Дике с потенциалом Старобинского у нас есть три параметра медленного скатывания:

$$\epsilon_1 = -\frac{\dot{H}}{H^2}, \quad \epsilon_2 = \frac{\ddot{\phi}}{H\dot{\phi}}, \quad \epsilon_3 = \frac{\dot{\phi}}{2H\phi}. \quad (20)$$

Инфляция медленного скатывания достигается, когда  $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3 \ll 1$ , и прекращается, если любой из них становится равным 1 [32].

## 4 $f(R, \varphi)$ теория

Рассматриваем положительно искривленную Вселенную Фрийдмана-Леметра-Робертсона-Уокера (FLRW), для которой метрическая форма записывается как

$$ds^2 = -dt^2 + a(t)^2 \left[ \frac{dr^2}{1 - Kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \right], \quad (21)$$

где  $K > 0$ . Эта теория является расширением модели  $R^2$  Старобинского [33] с дополнительным скалярным полем, неминимально связанного с гравитацией,

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ \frac{1}{2} (M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2) R + \frac{1}{2} AR^2 - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right]. \quad (22)$$

Здесь  $\alpha$  и  $A$  - это константы, параметризующие связь скалярного поля с ОТО и модификацию теории Старобинского соответственно. Следуем [34] и выбираем потенциал в виде

$$V = \frac{m^2}{2} \phi^2 + \frac{\beta}{3} \phi^3 + \frac{\lambda}{4} \phi^4. \quad (23)$$

Преобразуем действие (22) в би-скалярно-тензорную теорию, определяя  $f(\phi, R) = \frac{1}{2} (M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2) R + \frac{1}{2} AR^2$ . Дополнительная скалярная степень свободы затем определяется стандартным образом, устанавливая  $\psi = \partial f / \partial R \equiv f_R$ . Это позволяет записать скаляр Риччи и функцию  $f(R, \phi)$  в терминах двух полей как

$$R = \frac{1}{A} \left( \psi - \frac{M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2}{2} \right), \quad f = \psi R - \frac{[\psi - \frac{1}{2} (M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2)]^2}{2A}. \quad (24)$$

В замкнутом пространстве-времени FRLW уравнения движения для полей  $\psi$  и  $\phi$  имеют вид

$$\ddot{\psi} + 3H\dot{\psi} = \frac{1}{3} \left[ \frac{M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2}{2A} \left( \frac{1}{2} (M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi^2) - \psi \right) + (\rho - 3P) \right] \quad (25)$$

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} = -V_\phi - \alpha\phi R. \quad (26)$$

Уравнения Фрийдмана задаются как

$$H^2 + \frac{K}{a^2} = \frac{\psi R - f}{6\psi} + \frac{\rho}{3\psi} - H \frac{\dot{\psi}}{\psi}, \quad (27)$$

$$\dot{H} - \frac{K}{a^2} = \frac{H\psi}{2\psi} + \frac{\dot{\psi}}{2\psi} - \frac{(\rho + P)}{2\psi}, \quad (28)$$

$$\dot{H} = \frac{R}{6} - 2H^2 - \frac{K}{a^2}. \quad (29)$$

Здесь стремимся использовать отскок для установки начальных условий для следующей инфляционной эпохи, управляемой членом  $R^2$ .

## 4.1 Условия для отскока

Необходимые условия для отскока (см. [35]):

$$H(t_b) = 0, \quad \dot{H}(t_b) > 0, \quad \rho + 3p < 0. \quad (30)$$

Если мы предположим, что баротропная жидкость имеет вид  $p = w\rho$ , нарушение сильного энергетического условия ограничивает уравнение состояния до  $w_b < -1/3$ . Очевидная величина, которую можно проверить при отскоке, наложив первые два условия отскока, используя ур. (11),

$$\psi_b + \frac{\alpha}{2}\phi_b^2 \geq \frac{6AK}{a_b^2} + \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2}. \quad (31)$$

Это уравнение выполняется при использовании значений  $m = 10^{-5}M_{\text{Pl}}$ ,  $\beta = -\sqrt{4.49}\lambda m$ ,  $\lambda = 10^{-12}$ ,  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $V_0 = 0$ ,  $A = 10^{12}$ ,  $a = 10^2$ ,  $K = m^2$ . Параметр "медленного скатывания"  $\epsilon = -\dot{H}/H^2$  связан с уравнением состояния через

$$\epsilon = \frac{3}{2}(1 + w). \quad (32)$$

Условие на  $\epsilon$  при отскоке:  $\epsilon_b < 1$ . Используя ур. (27)-(29) и условия отскока, находим выражение для  $\epsilon_b$ :

$$\epsilon_b = \frac{3}{2} \left( \frac{\rho_b + p_b}{\rho_b} \right) = \frac{3A(4K\psi_b - a_b^2\dot{\psi}_b - a_b^2R_b\psi_b)}{2AK\psi_b + \frac{1}{6}a_b^2 \left[ \frac{1}{2}(M_{\text{Pl}}^2 - \alpha\phi_b^2) - \psi_b \right]^2} < 1. \quad (33)$$

## 4.2 Условие для инфляции

В сценарии, где  $\phi$  устанавливается в 0 после отскока, инфляция управляется скаларом с начальными условиями, заданными в конце фазы отскока. Параметр медленного скатывания становится

$$\epsilon_\psi = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{8\psi^2} \left( \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} - \psi \right)^2. \quad (34)$$

Устанавливая  $\epsilon_\psi = 1$ , мы можем определить конец инфляции, который происходит, когда  $\psi = 2M_{\text{Pl}}^2$ . Поэтому нам нужно, чтобы  $\psi > 2M_{\text{Pl}}^2$  в начале этого периода. Интегрируя наш параметр медленного скатывания, мы можем определить начальные условия инфляции для  $\psi$ , чтобы обеспечить необходимый масштаб инфляции (как минимум 60 е-складок инфляции).

Используя параметры  $m = 10^{-5}M_{\text{Pl}}$ ,  $\beta = -\sqrt{4.49}\lambda m$ ,  $\lambda = 10^{-12}$ ,  $\alpha = 10^{-3}$ ,  $V_0 = 0$ ,  $A = 10^{12}$ ,  $a = 10^2$ ,  $K = m^2$ , мы находим, что  $\psi_{\text{inf}} > 16M_{\text{Pl}}^2$ .

Более подробные выкладки по этой теории можно найти в [44].

## 5 Теория с двумя скалярными полями

Рассмотрен сценарий с двумя скалярными полями (каждое из которых минимально связано с гравитацией), который естественным образом приводит к вышеупомянутым особенностям. Следует отметить, что без излишней настройки призрачная нестабильность — следствие нарушения NEC (условия нулевой энергии) — может все еще присутствовать. Этого нельзя полностью избежать в конструкции, подобной этой. Однако это нарушение может быть ограничено очень малым временным окном (вокруг отскока). В работе [37] показано, что это может произойти естественным образом, например, путем введения соответствующей функции связи в широком классе двухполевых моделей. Что касается нарушения, остающегося близко к отскоку, пока нет ответа. Возможно, окончательное решение лежит в области квантовых коррекций.

Преимуществом существования инфляционной фазы является то, что она служит для смягчения возможных эффектов (таких как генерация анизотропных по своей сути возмущений) второго поля, которое необходимо для отскока. Одна фаза может плавно переходить в другую.

Мы начинаем с установки общей формулировки, с подробностями, отложенными до последующих разделов. Большая пространственная однородность и изотропность Вселенной побуждают использовать плоскую метрику FLRW, а именно

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)dx^2. \quad (35)$$

Главная цель - создать форму  $a(t)$ , согласующуюся с отскакивающей Вселенной, материал должен быть выбран соответствующим образом. Однако, с учетом того, что отскок требует нарушения NEC, этого нельзя достичь с одним скалярным полем, минимально связанным с гравитацией. Хотя возможно, что модификация обычного действия Эйнштейна-Гильберта для гравитации может привести к отскоку, могут появиться различные осложнения (нестабильности), которые часто возникают. В данной работе ограничиваемся минимально связанными скалярными полями вместе с каноническим действием гравитации. Начиная с самой простой теории, постулируется действие

$$S = \frac{M_{\text{Pl}}^2}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2L_1(\phi, \partial_\mu \phi) - 2L_2(\chi, \partial_\mu \chi)), \quad (36)$$

где  $L_1(\phi, \partial_\mu \phi)$  и  $L_2(\chi, \partial_\mu \chi)$  являются соответствующими плотностями Лагранжиана. Разделимость Лагранжиана позволяет ассоциировать  $\phi$  и  $\chi$  с динамикой Вселенной, доминируемой соответствующими полями в разные эпохи. В то время как Лагранжиан для  $\phi$  будет каноническим, для  $\chi$  он должен иметь неправильный знак (отрицательный) для кинетического члена, а именно

$$L_1(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + V_1(\phi), \quad (37)$$

$$L_2(\chi, \partial_\mu \chi) = -\frac{1}{2} \partial_\mu \chi \partial^\mu \chi + V_2(\chi). \quad (38)$$

Такой выбор для  $L_2$  (также использованный в [39]) очевидно приведет к призрачным нестабильностям. Однако, ради простоты, пока не учитываем это.

Для действия в уравнении (36) уравнения движения приводят к

$$3H^2 = \rho_\phi + \rho_\chi, \quad -2\dot{H} = \rho_\phi + P_\phi + \rho_\chi + P_\chi, \quad (39)$$

где соответствующие плотности энергии и давления задаются

$$\rho_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V_1(\phi), \quad P_\phi = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V_1(\phi), \quad (40)$$

$$\rho_\chi = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 + V_2(\chi), \quad P_\chi = -\frac{1}{2}\dot{\chi}^2 - V_2(\chi). \quad (41)$$

Уравнения движения для скалярных полей записываются как

$$\ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + V_{1,\phi} = 0, \quad \ddot{\chi} + 3H\dot{\chi} - V_{2,\chi} = 0, \quad (42)$$

где  $A_{,x} \equiv \partial A / \partial x$ .

Поскольку мы хотим, чтобы отскок был с последующей инфляционной эпохой, наиболее оптимальным выбором для  $V_1(\phi)$  будет тот, который допускает необходимое медленное скатывание. Упрощающее предположение — что динамика полей  $\chi$  и  $\phi$  в значительной степени развязаны — позволяет нам не только выбрать  $V_1(\phi)$ , практически независимый от  $\chi$ , но и выбрать  $V_2(\chi)$ , который способствует отскоку. Такое разделение динамики, однако, не ожидается сохранить, так как Вселенная входит в фазу или выходит из нее, где вклад поля  $\chi$  сравним с (хотя и меньше, чем) вкладом поля  $\phi$ . Динамика в этих эпохах не поддается аналитическому анализу, и необходимо прибегать к численным методам.

В работе [37] реализован сценарий отскока с последующей инфляцией Старобинского [33, 38]. Там же приведены формы для  $V_1(\phi)$  и  $V_2(\chi)$  которые с заданными константами реализуют этот сценарий:

$$V_1(\phi) = \begin{cases} \alpha e^{-\sqrt{\beta}\phi}, & \beta \geq 6, \quad \phi \geq \phi_*, \quad (\text{Экспоненциальное сжатие}) \\ A_s - B_s(\phi - \phi_0)^2, & \phi_* < \phi < \phi_i, \quad (\text{Отскок}) \\ \frac{3}{4}m^2 \left(1 - e^{-\sqrt{2/3}\phi}\right)^2, & \phi \leq \phi_i, \quad (\text{Медленное расширение}), \end{cases} \quad (43)$$

и

$$V_2(\chi) = P_s \exp\left(-Q_s(\chi - \chi_0)^2\right), \quad (44)$$

где  $A_s, B_s, P_s, \phi_*, \phi_0, \alpha$ , и  $Q_s$  вычисляемые константы, см. Appendix C [37]

## 6 Заключение

В данной работе были рассмотрены космологические модели, включающие фазы инфляции и отскока, в контексте модифицированных теорий гравитации.

Стандартная космологическая модель успешно описывает тепловую эволюцию Вселенной и объясняет множество наблюдаемых феноменов. Однако она сталкивается с проблемами, такими как причинно-следственная связь, проблема горизонта и плоскостности. Инфляционная теория решает эти проблемы, вводя фазу экспоненциального расширения. Несмотря на это, остается нерешенной проблема начальной сингулярности. Модель отскока, как альтернатива инфляции, решает проблему сингулярности, но сталкивается с проблемами анизотропии и призрачной нестабильности. Объединение инфляционных моделей и моделей отскока позволяет устранить недостатки каждого подхода, предлагая более комплексное объяснение эволюции Вселенной.

В работе рассмотрены такие модели как:

- петлевая квантовая космология (LQC)
- петлевая квантовая космология Бранса-Дикке (LQC BD)
- $f(R, \varphi)$  теория
- теория с двумя скалярными полями

Результаты данной работы показывают, что комбинированные модели инфляции и отскока в модифицированных теориях гравитации имеют значительный потенциал для объяснения ранних этапов эволюции Вселенной и решения существующих космологических проблем. Будущие исследования в этом направлении могут привести к более глубокому пониманию фундаментальных процессов, происходящих в ранней Вселенной. Здесь рассмотрены только несколько примеров теорий, где реализуется подобный сценарий. Существует еще большое множество, например такие теории, как модификации общей теории относительности [42, 43, 44], и скалярные поля, неминимально связанные с гравитацией [45, 46, 47, 48, 49, 50, 51, 52].

## Список литературы

- [1] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 347.
- [2] V. Mukhanov and G. Chibisov, *JETP Lett.* 33 (1981) 532 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 33 (1981) 549]; W. Press, *Phys. Scr.* 21 (1980) 702; A. A. Starobinsky, *JETP Lett.* 30 (1979) 682 [*Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 30 (1979) 719].
- [3] A. A. Starobinsky, *Phys. Lett. B* 91 (1980) 99; K. Sato, *Mon. Not. R. Astron. Soc.* 195 (1981) 467.
- [4] E. Komatsu et al. (WMAP Collaboration), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 192 (2011) 18; D. Larson et al. (WMAP Collaboration), *Astrophys. J. Suppl. Ser.* 192 (2011) 16.
- [5] P. A. R. Ade et al. (PLANCK Collaboration), *Astron. Astrophys.* 571 (2014) A22.
- [6] P. A. R. Ade et al. (PLANCK Collaboration), *Astron. Astrophys.* 594 (2016) A20.
- [7] J. Khoury, B. A. Ovrut, P. J. Steinhardt and N. Turok, *Phys. Rev. D* 64 (2001) 123522, arXiv:hep-th/0103239.
- [8] F. Finelli and R. Brandenberger, *Phys. Rev. D* 65 (2002) 103522, arXiv:hep-th/0112249.
- [9] S. Tsujikawa, R. Brandenberger and F. Finelli, *Phys. Rev. D* 66 (2002) 083513, arXiv:hep-th/0207228.
- [10] R. H. Brandenberger (6 2012) arXiv:1206.4196 [astro-ph.CO].
- [11] R. H. Brandenberger, *Inflationary cosmology: Progress and problems*, in IPM School on Cosmology 1999: Large Scale Structure Formation, (1 1999). arXiv:hep-ph/9910410.
- [12] M. Novello and S. E. P. Bergliaffa, *Phys. Rept.* 463 (2008) 127, arXiv:0802.1634 [astro-ph].
- [13] Y.-F. Cai, *Sci. China Phys. Mech. Astron.* 57 (2014) 1414, arXiv:1405.1369 [hep-th].
- [14] D. Battefeld and P. Peter, *Phys. Rept.* 571 (2015) 1, arXiv:1406.2790 [astro-ph.CO].
- [15] Y. Wan, T. Qiu, F. P. Huang, Y.-F. Cai, H. Li, and X. Zhang, “Bounce inflation cosmology with Standard Model Higgs boson,” *J. Cosmol. Astropart. Phys.* 12, 019 (2015), arXiv:1509.08772 [gr-qc].
- [16] Jaume Amors, Jaume de Haro, and Sergei D. Odintsov, “Bouncing loop quantum cosmology from  $F(T)$  gravity,” *Phys. Rev. D* 87, 104037 (2013), arXiv:1305.2344 [gr-qc].
- [17] T. Thiemann, *Lect. Notes Phys.* 631, 41 (2003); A. Ashtekar and J. Lewandowski, *Class. Quant. Grav.* 21 (2004) R53; C. Rovelli, *Quantum Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics (2004).
- [18] M. Bojowald, *Living Rev. Rel.* 8, 11 (2005).

- [19] M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. 86, 5227 (2001).
- [20] A. Ashtekar, M. Bojowald, J. Lewandowski, Adv. Theo. Math. Phys. 7, 233-268 (2003).
- [21] M. Bojowald, G. Date, K. Vandersloot, Class. Quantum Grav. 21, 1253 (2004); P. Singh, A. Toporensky, Phys. Rev. D 69, 104008 (2004); G.V. Vereshchagin, JCAP 07 (2004) 013; G. Date, Phys. Rev. D 71, 127502 (2005). M. Bojowald, Phys. Rev. Lett. 95, 061301 (2005); M. Bojowald, R. Goswami, R. Maartens, P. Singh, Phys. Rev. Lett. 95, 091302 (2005); G. Date, Phys. Rev. D 71, 127502 (2005); G. Date, G. M. Hossain, Phys. Rev. Lett. 94, 011302 (2005); A. Ashtekar, M. Bojowald, Class.Quant.Grav. 23 (2006) 39; R. Goswami, P. S. Joshi, P. Singh, Phys. Rev. Lett. 96 (2006) 031302.
- [22] C. Rovelli, Quantum Gravity, Cambridge, Cambridge University Press, 2004; C. Rovelli, Living Rev. Relativity, 1, 1 (1998); L. Smolin, arXiv:hep-th/0408048v3; T. Thiemann, Lect. Notes Phys. 631, 41(2003); A. Perez, arXiv:gr-qc/0409061v3.
- [23] A. Barrau, T. Cailleteau, J. Grain and J. Mielczarek (2014). Observational issues in loop quantum cosmology. Classical and Quantum Gravity, 31(5), 053001. doi:10.1088/0264-9381/31/5/053001.
- [24] G. Calcagni, Ann. Phys. 525 (2013) 323.
- [25] K. A. Meissner, Class. Quant. Grav. 21 (2004) 5245 [arXiv:gr-qc/0407052].
- [26] P. Singh, K. Vandersloot and G. V. Vereshchagin, Phys. Rev. D 74 (2006) 043510 [arXiv:gr-qc/0606032].
- [27] X.-D. Zhang and Y. Ma, Loop quantum Brans-Dicke theory, J. Phys. Conf. Ser. 360 (2012) 012055 [arXiv:1111.2215].
- [28] X. Zhang, Y. Ma and M. Artymowski, Loop quantum Brans-Dicke cosmology, Phys. Rev. D 87 (2013) 084024 [arXiv:1211.4183].
- [29] C. Brans and R.H. Dicke, Mach's principle and a relativistic theory of gravitation, Phys. Rev. 124 (1961) 925.
- [30] M. Artymowski, Y. Ma and X. Zhang, Comparison between Jordan and Einstein frames of Brans-Dicke gravity a la loop quantum cosmology, Phys. Rev. D 88 (2013) 104010 [arXiv:1309.3045].
- [31] X.-D. Zhang and Y. Ma, Loop quantum modified gravity and its cosmological application, Front. Phys. 8 (2013) 80.
- [32] B. Tahmasebzadeh, K. Rezaadeh, and K. Karami, JCAP 1607 (2016) 006.
- [33] A. Starobinsky, Physics Letters B 91 (1980) 99.
- [34] O. Güngör and G. D. Starkman, JCAP 04, 003 (2021), arXiv:2011.05133 [gr-qc].
- [35] C. Molina-Paris and M. Visser, Phys. Lett. B 455, 90 (1999), arXiv:gr-qc/9810023.

- [36] R. Daniel, M. Campbell, C. van de Bruck and P. Dunsby, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 06 (12 2022) 030, arXiv:2212.01093 [gr-qc].
- [37] M. Kaur, D. Nandi, D. Choudhury, and T. R. Seshadri, *Int. J. Mod. Phys. D* 33, 2450006 (2024), submitted 1 April, 2024. arXiv:2302.13698
- [38] A. Starobinsky, *Physics Letters B* 117 (1982) 175.
- [39] Y.-F. Cai, T. Qiu, Y.-S. Piao, M. Li and X. Zhang, *JHEP* 10 (2007) 071, arXiv:0704.1090 [gr-qc].
- [40] M. Bojowald, *Living Rev. Rel.* 11, 4 (2008), arXiv:1209.3403 [gr-qc].
- [41] A. Ashtekar and P. Singh, *Class. Quant. Grav.* 28, 213001 (2011).
- [42] K. Bamba, G. G. L. Nashed, W. El Hanafy and S. K. Ibraheem, *Phys. Rev. D* 94 (2016) 083513, arXiv:1604.07604 [gr-qc].
- [43] T. Saidov and A. Zhuk, *Phys. Rev. D* 81 (2010) 124002, arXiv:1002.4138 [hep-th].
- [44] R. Daniel, M. Campbell, C. van de Bruck and P. Dunsby, *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 06 (12 2022) 030, arXiv:2212.01093 [gr-qc].
- [45] T. Qiu (4 2014) arXiv:1404.3060 [gr-qc].
- [46] J.-Q. Xia, Y.-F. Cai, H. Li and X. Zhang, *Phys. Rev. Lett.* 112 (2014) 251301, arXiv:1403.7623 [astro-ph.CO].
- [47] S. Ni, H. Li, T. Qiu, W. Zheng and X. Zhang, *Eur. Phys. J. C* 78 (2018) 608, arXiv:1707.05570 [astro-ph.CO].
- [48] T. Qiu and Y.-T. Wang, *JHEP* 04 (2015) 130, arXiv:1501.03568 [astro-ph.CO].
- [49] Y. Wan, T. Qiu, F. P. Huang, Y.-F. Cai, H. Li and X. Zhang, *JCAP* 12 (2015) 019, arXiv:1509.08772 [gr-qc].
- [50] D. Sloan, K. Dimopoulos and S. Karamitsos, *Phys. Rev. D* 101 (2020) 043521, arXiv:1912.00090 [gr-qc].
- [51] J. Mathew (11 2018) arXiv:1811.06001 [astro-ph.CO].
- [52] S. Upadhyay (4 2023) arXiv:2304.14273 [gr-qc].